1. Ecuaciones exactas.

Definición

Sean D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $M, N : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en D. Se dice que la ecuación diferencial:

$$\boxed{M(t,x) + N(t,x)x' = 0}$$

está escrita en forma exacta en $\mathcal{D}$ cuando existe una función $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ que verifica

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial t} = M, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = N \qquad \text{en } \mathcal{D}}$$

Al igual que hicimos con las ecuaciones en variables separables vamos a formalizar la «forma» que tienen las soluciones de la ecuación.

Teorema

Sean $M, N : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ y supongamos que la ecuación diferencial

$$M(t,x) + N(t,x)x' = 0$$

está escrita en forma exacta en $\mathcal{D}$, es decir, existe $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ tal que $\nabla F = (M, N)$. Sea I un intervalo en $\mathbb{R}$. Una función derivable $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ con su gráfica contenida en $\mathcal{D}$, es solución de la ecuación diferencial si, y sólo si, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que x viene definida implícitamente en I por la ecuación

$$\boxed{F(t,x) = C}$$

Una vez considerada la forma de las soluciones exactas, es hora, de saber si realmente existen tales soluciones.

Existencia y unicidad.

Sean $M, N : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $\mathcal{D}$, sea $(t_0, x_0) \in int(\mathcal{D})$ y consideremos el problema del valor inicial:

$$(P) : \begin{cases} M(t,x) + N(t,x)x' = 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Supongamos que la ecuación diferencial está escrita en forma exacta y $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ tal que $\nabla F = (M, N)$, entonces se verifica:

I) Una función derivable $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$, con su gráfica contenida en $\mathcal{D}$ y tal que se verifica $x(t_0) = x_0$, es solución del problema (P) si y solo si viene definida implícitamente en I por la ecuación

$$\boxed{F(t,x) = F(t_0, x_0)}$$

II) Si $\boxed{N(t_0, x_0) \neq 0}$ existe un intervalo abierto I tal que $t_0 \in I$ y tal que el problema de valor inicial (P) posee una única solución definida en I

Tras ver lo «genial» que sería que nuestra ecuación fuese exacta, veamos unas condiciones que nos aseguren la existencia de que tal función F exista.

Definición

Diremos que el par de funciones continuas $M, N : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ es exacto en D cuando existe $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ tal que $\nabla F = (M, N)$.

¡Condición suficiente y necesaria!

Sean I y J dos intervalos en $\mathbb{R}$, $D = I \times J$ y $M, N \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$, entonces es equivalente:

(I) El par (M, N) es exacto en $\mathcal{D}$.

(II) $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$ en $\mathcal{D}$

además *(para los que se la quieran memorizar)* tal función F viene dada por

$$F(t,x) = \int_{t_0}^{t} M(s,x)ds + \int_{x_0}^{x} N(t,s)ds$$

1.1. Factor integrante

Ahora nos encontramos con la gran desilusión: La mayoría de las EDOs no están escritas en forma exacta☹, pero, a pesar de todo, es posible en ciertas circunstancias encontrar una función μ que no se anula, tal que al multiplicar nuestra ecuación por dicha función, esta queda escrita en forma exacta.

Definición

Sean $M, N \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$, una función $\mu \in \mathcal{C}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$, que no se anula en $\mathcal{D}$, se dice que es un factor integrante en $\mathcal{D}$ para la ecuación diferencial:

$$M(t,x) + N(t,x)x' = 0$$

cuando la ecuación diferencial equivalente:

$$\boxed{\mu(t,x)M(t,x) + \mu(t,x)N(t,x)x' = 0}$$

está escrita en forma exacta.

Este factor integrante μ debe cumplir la ecuación en derivadas parciales: $\boxed{N\frac{\partial \mu}{\partial t} - M\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t})}$, pero, el calculo de las soluciones que no se anulen, para esta EDP, es mucho más difícil que el calculo de la propia ecuación ☹. Pero, a veces, es posible encontrar factores integrantes μ que solo dependan de una de las variables. ☺

μ en función de la primera variable.(t)

Sean $\mathcal{D} = I \times J$ con I, J intervalos, $M, N \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ entonces la ecuación diferencial:

$$M(t,x) + N(t,x)x' = 0$$

admite un factor integrante en $\mathcal{D}$ que depende solo de la t ($\mu \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$) si y solo si existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ tal que se verifica la condición

$$\boxed{\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}\right)(t,x) = \varphi(t)N(t,x)}$$

Y, además $\mu(t) = e^{\int \varphi(t)dt}$ ☺

μ en función de la segunda variable.(x)

Sean $\mathcal{D} = I \times J$ con I, J intervalos, $M, N \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ entonces la ecuación diferencial:

$$M(t,x) + N(t,x)x' = 0$$

admite un factor integrante en $\mathcal{D}$ que depende solo de la x ($\mu \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$) si y solo si existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ tal que se verifica la condición

$$\boxed{\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}\right)(t,x) = \varphi(x)N(t,x)}$$

Y, además $\mu(x) = e^{-\int \varphi(x)dx}$ ☺

2. Ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Definición:

La forma general de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden es:

$$\boxed{F(t,x,x',x'')=0}$$

donde F representa una función de cuatro variables definida en cierta región A de $\mathbb{R}^4$ y donde $t \longrightarrow x(t)$ representa la función incógnita.

Una solución de dicha ecuación es una función $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

(i) x es dos veces derivable en I.

(ii)$(t, x(t), x'(t), x''(t)) \in A$ para cada $t \in I$

(iii)$F(t, x(t), x'(t), x''(t)) = 0$ para cada $t \in I$

3. Lineales de segundo orden

Definición:

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden en forma explicita es una ecuación del tipo:

$$\boxed{x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t)}$$

donde las funciones a, b, c son conocidas, además precisamos que sean continuas en un intervalo I.

Decimos que la ecuación lineal es homogénea cuando es del tipo:

$$\boxed{x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t)}$$

es decir, cuando $c(t) = 0$ para todo t, en caso contrario decimos que la ecuación es NO homogénea.

3.1. Teorema de existencia y unicidad

Sean $a, b, c : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces, el problema

$$(P)\begin{cases} x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t) \\ x(t_0) = \alpha, \qquad x'(t_0) = \beta \end{cases}$$

posee una única solución definida en el intervalo I.

3.2. Lineales homogéneas, El espacio de soluciones.

Al igual que pasaban con las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de primer orden, estas, forman un espacio vectorial, es decir:

Sea (E) $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ una EDO lineal de segundo orden, sean x, y dos soluciones de tal ecuación y sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

$\diamondsuit$ $x + y$ es solución de (E).

$\diamondsuit$ αx es solución de (E).

Definición:

Dadas dos funciones $x_1, x_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$, diremos que son linealmente independientes en el intervalo I cuando sucede que si c_1 y c_2 son dos constantes tales que $c_1x_1(t) + c_2x_2(t) = 0$ para cada $t \in I$ se tiene entonces que $c_1 = c_2 = 0$. En otro caso diremos que son linealmente dependientes.

Definición:

Dadas dos funciones $x_1, x_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables en el intervalo I, se llama *wronskiano* de las funciones x_1, x_2 a la función $W(x_1, x_2) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} \tag{1}$$

Dada la anterior definición podemos establecer el siguiente criterio para ver si dos funciones son o no linealmente independientes.

Proposición:

Si $x_1, x_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones derivables en el intervalo I y existe $t_0 \in I$ tal que $W(x_1, x_2)(t_0) \neq 0$ entonces x_1 y x_2 son linealmente independientes.

Nota: Es importante saber que en el caso del espacio de soluciones de la ecuación, o el wronskiano es nulo, o no se anula en ningún punto.

Es importante saber que si $x_1, x_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ son dos soluciones de la ecuación lineal homogénea $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ y $t_0 \in I$ el wronskiano de ambas soluciones verifica:

$$\boxed{W(x_1, x_2)(t) = W(x_1, x_2)(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}}$$

Hemos visto que el conjunto V_E de todas las soluciones de la ecuación lineal homogénea $(E) \equiv x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ tiene estructura de espacio vectorial, este espacio vectorial tiene dimensión 2, es decir, (E) tiene dos soluciones linealmente independientes, y cualquier otra solución es combinación lineal de estas.

El principal problema, aun así es encontrar no solo una solución, el problema ahora es mayor que en el caso de primer orden, ahora necesitamos DOS soluciones, y además estas deben ser LINEALMENTE INDEPENDIENTES, ☹parece, que nos encontramos frente a un problema que nunca seremos capaces de resolver, pero la cosa se facilita, una vez encontrada una solución es posible encontrar (relativamente fácil) una segunda solución linealmente independiente a la primera.

El objetivo es, si x_1 es una solución de (E), y tenemos una función $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ no constante tal que $x_2 = vx_1$ y x_2 sea también solución de (E). Haciendo uso de la formula de Abel-Liouville sobre el wronskiano: $\boxed{W(x_1, x_2)(t) = W(x_1, x_2)(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}}$ y sustituyendo $x_2 = vx_1$ obtenemos el siguiente resultado:

Corolario:

Sean $p, q : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas, $(E) \equiv x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ una ecuación lineal homogénea y $x_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una solución de (E), entonces:

$$\boxed{x_2(t) = Cx_1(t) \int \frac{1}{x_1^2(t)} e^{-\int p(t)dt}}$$

Es solución de (E), es decir, la función v definida anteriormente, es $v(t) = C \int \frac{1}{x_1^2(t)} e^{-\int p(t)dt}$ donde C es una constante real a determinar.

Pasos prácticos:

1. Buscarse la vida para encontrar una solución de la ecuación. ☹
2. Tener en cuenta que la segunda solución es de la forma $x_2 = vx_1$ con v no contante
3. aplicar la formula del wronskiano para $C = 1$ $W(x_1, vx_1)(t) = e^{-\int p(t)dt}$
4. desarrollar el determinante y resolver.

3.2.1. Coeficientes constantes.

Un caso muy particular de la ecuación $(E) \equiv x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$es cuando las funciones p, q son constantes, en ese caso si alguna función del tipo $x(t) = e^{\lambda t}$ es solución de (E)si y solo si $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, pero, abría que considerar ciertos casos.

Caso 1: existan dos soluciones reales.λ_1, λ_2

Este es el mejor de los casos, pues $x_1 = e^{\lambda_1 t}$ y $x_2 = e^{\lambda_2 t}$ son soluciones de (E)y ambas son linealmente independientes. ☺

Caso 2: la raiz del polinomio es doble.☹

En ese caso $x_1 = e^{-\frac{p}{2}t}$ es una solución de (E), aplicando la formula del wronskiano, o por la formula para encontrar una solución linealmente independiente tenemos que $x_2 = te^{-\frac{p}{2}t}$

Caso 3: no tenga soluciones reales.☹

En ese caso, tenemos que $\lambda_1 = \alpha + \beta\imath$ y que $\lambda_2 = \alpha - \beta\imath$ son soluciones del polinomio característico ($\lambda^2 + p\lambda + q = 0$), en ese caso, las funciones:

$$\boxed{x_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \qquad x_2(t) = e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)}$$

Son soluciones de (E)

Solución practica:

Si tenemos una ecuación del tipo $x'' + px' + qx = 0$ podremos encontrar dos soluciones linealmente independiente siguiendo unos sencillos pasos:

1.	Buscamos las raíces al polinomio $P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$ y distinguimos los siguientes casos
	si λ_1, λ_2 son dos raíces, entonces $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$,$x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ son soluciones l.i.
	si λ es la única raíz del P entonces $x_1(t) = e^{\lambda t}$ y $x_2(t) = te^{\lambda t}$ son soluciones l.i.
	si $\alpha + \beta\imath$ y $\alpha - \beta\imath$ son raíces de P entonces $x_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ y$x_2(t) = e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)$ son soluciones l.i.
2.	una vez tenemos dos soluciones, x_1, x_2 sabemos que x es solución sii $x = c_1x_1 + c_2x_2$

Ecuaciones diferenciales homogéneas de Euler.

Una ecuación diferencial lineal homogénea es de euler si es del tipo $t^2x'' + atx' + bx = 0$, la estructura de la ecuación nos hace sospechar que existe una solución del tipo $x(t) = t^\lambda$, de imponer esto, tendríamos el polinomio de segundo grado $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + a\lambda + b$ o equivalentemente $p(\lambda) = \lambda^2 + (a-1)\lambda + b$, si este polinomio tiene dos raíces, entonces esos valores serán los valores para los que la función $x(t) = t^\lambda$ serán soluciones linealmente independientes en un intervalo I, si solo encontramos una raíz podemos aplicar la formula del wronskiano para encontrar una segunda linealmente independiente a la primera.

Pero, ¿y si el polinomio no tiene ninguna raíz real? en ese caso se propone el cambio de variable $\boxed{y(s) = x(\pm e^s)}$ que se deshace $x(t) = y(log|t|)$, este cambio transforma nuestra ecuación en una de coeficientes constantes de la forma $\boxed{y'' + (a-1)y' + by = 0}$.

De esta forma queda el método resumido en:

1.	considerar el polinomio $p(\lambda) = \lambda^2 + (a-1)\lambda + b$:
1.1	tiene dos soluciones λ_1, λ_2, entonces $x_1(t) = t^{\lambda_1}$ y $x_2(t) = t^{\lambda_2}$ son soluciones l.i.
1.2	tiene una solución λ entonces $x_1(t) = \|t\|^{\lambda}$ y $x_2(t) = \|t\|^{\lambda} \log \|t\|$ son soluciones l.i.
1.3	si no tiene soluciones reales se considera el cambio $\boxed{y(s) = x(\pm e^s)}$, resolver la ecuación resultante $\boxed{y'' + (a-1)y' + by = 0}$ y deshacer el cambio con $x(t) = y(log\|t\|)$
2.	x es solución de la ecuación si $x = c_1x_1 + c_2x_2$

3.2.2. Lineales NO homogéneas

Como en el caso de las lineales NO homogéneas de primer grado, estas, también definen un espacio afín sobre el conjunto de las soluciones de la homogénea, esto es, que si V_0 denota el conjunto de las soluciones de la ecuación $(E) \equiv x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$, entonces el conjunto de soluciones de $(E') \equiv x'' + p(t)x' + q(t)x = c(t)$, es $\boxed{V_c = x_p + V_0}$ donde x_p es una solución conocida de $(E') \equiv x'' + p(t)x' + q(t)x = c(t)$.

Variación de las constantes

Este método consiste en suponer que existen dos funciones $v_1, v_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ no constantes, tales que $x(t) = v_1(t)x_1(t) + v_2(t)x_2(t)$ es solución de $(E') \equiv x'' + p(t)x' + q(t)x = c(t)$, además para simplificar cálculos pedimos que $v_1'x_1 + v_2'x_2 = 0$, de esta forma obtenemos un sistema de ecuaciones que tiene por solución

$$\boxed{v_1(t) = \int \frac{-x_2(t)c(t)}{W(x_1, x_2(t)}dt \qquad v_2(t) = \int \frac{x_1(t)c(t)}{W(x_1, x_2)(t)}dt}$$

Solución practica.

1.	suponer que existe una solución del tipo $x(t) = v_1(t)x_1(t) + v_2(t)x_2(t)$ con v_1, v_2 no constante y $v_1'x_1 + v_2'x_2 = 0$
2.	sustituir en la ecuación y llegar al sistema de ecuaciones: $v_1'x_1 + v_2'x_2 = 0$ $v_1'x_1 + v_2'x_2' = c$
3.	resolver el sistema por la regla de Cramer
4.	Una vez obtenida las soluciones de Cramer, integrar las soluciones v_1', v_2'
5.	sustituir en $x(t) = v_1(t)x_1(t) + v_2(t)x_2(t)$, obteniendo así una solución ☺

Coeficientes indeterminados.

Este método tiene el inconveniente de que no es general, pero, sin embargo, cuando se puede aplicar simplifica en gran medida los cálculos, para poder aplicarlo necesitamos dos condiciones

1. Sólo se puede usar cuando la ecuación homogénea asociada es de coeficientes constantes, es decir, es del tipo
$$\boxed{x'' + px' + qx = c(t) \text{ donde } p, q \in \mathbb{R}}$$

2. La función $c(t)$ no puede ser cualquier función continua; c debe ser una función polinómica, una exponencial, un seno, un coseno, o una combinación lineal de estas ultimas o productos de estas.

Este tema lo abordaremos, dependiendo de los casos las posibles soluciones de tal ecuacion:

Caso $c(t) = P_n(t)$ un polinomio de grado n en t

En ese caso, tenemos que la ecuación queda de la forma $\boxed{x'' + px' + qx = P_n(t)}$, entonces la ecuación posee una solución de la forma

$$\boxed{x(t) = t^k Q_n(t)}$$

Donde $\begin{cases} k = 0 & si \quad q \neq 0 \\ k = 1 & si \quad q = 0 yp \neq 0 \\ k = 2 & si \quad q = p = 0 \end{cases}$

Caso $c(t) = P_n e^{\alpha t}$

En este caso, parece evidente pedir el cambio de variable $\boxed{y(t) = x(t)e^{-\alpha t}}$ de que se deshace con el cambio $x(t) = y(t)e^{\alpha t}$ quedando la ecuación tras el cambio

$$\boxed{y'' + (2\alpha + p)y' + (\alpha^2 + p + q)y = P_n(t)}$$

y la resolvemos como en el caso anterior, y deshaciendo el cambio nos queda que la ecuación tiene una solución del tipo:

$$\boxed{x(t) = t^k Q_n(t) e^{\alpha t}}$$

Caso $c(t) = a\cos(\beta t) + b\,\mathrm{sen}(\beta t)$

Dada la ecuación diferencial $\boxed{x'' + px' + qx = a\cos(\beta t) + b\,\mathrm{sen}(\beta t)}$ donde $p, q, a, b, \beta \in \mathbb{R}$ y la ecuación característica $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, se verifica:
(I) si $\beta\imath$ es solución de la ecuación característica, entonces existe una solución del tipo

$$\boxed{x(t) = t(A\,\mathrm{sen}(\beta t) + B\cos(\beta t))}$$

(I) si $\beta\imath$ no es solución de la ecuación característica, entonces existe una solución del tipo

$$\boxed{x(t) = A\,\mathrm{sen}(\beta t) + B\cos(\beta t)}$$

Caso $c(t) = e^{\alpha t}(P_m(t)\cos(\beta t) + Q_n(t)\,\mathrm{sen}(\beta t))$.

Este caso, engloba a TODOS los anteriores ☺conociendo una solución para este tipo de ecuaciones, los otros quedan como casos particulares para determinados valores de los parámetros.

Sea, pues, la ecuación diferencial $x'' + px' + qx = e^{\alpha t}(P_m(t)\cos(\beta t) + Q_n(t)\,\mathrm{sen}(\beta t))$, donde $p, q, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y P_m y Q_n polinomios de grado m y n. sea $\lambda = \alpha + \beta\imath$. Entonces la Ecuación tiene una solución de la forma

$$\boxed{x(t) = t^k e^{\alpha t}(R_r(t)\cos(\beta t) + S_r(t)\,\mathrm{sen}(\beta t))}$$

Donde R_r, S_r son polinomios de grado $r = \max\{m, n\}$ y donde k es la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico.

bien, para resolver ahora cualquier combinación lineal de lo visto anteriormente, recurrimos al siguiente resultado:

Teorema:

Si para cada $n \in \{1...m\}$ la función x_n es solución de $x'' + p(t)x' + q(t)x = c_n(t)$ y $\alpha_n \in \mathbb{R}$ entonces $x = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n$ es solución de la ecuación diferencial $x'' + p(t)x' + q(t)x = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n c_n(t)$